EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 37

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele. (30 de puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $20:2-10$ este egal cu … .

5p **2.** Dacă $a+2b=10$, atunci numărul $5a+10b$ este egal cu … .

5p **3.** Cel mai mare număr par din intervalul $[-2,6)$ este egal cu … .

5p **4.** Suplementul unghiului cu măsura de $135°$ are măsura de …° .

5p **5.** În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=10\text{cm}$. Suma lungimilor tuturor muchiilor acestui cub este egală cu …cm .

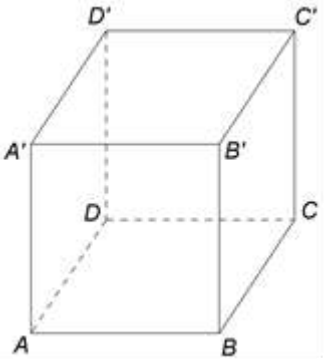


Figura 1

5p **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate informații referitoare la numărul de vizitatori ai unui muzeu în timpul unei săptămâni. Lunea, muzeul nu primește vizitatori.

Ziua	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Nr. vizitatori	200	100	150	200	300	250

Conform informațiilor din tabel, numărul total de vizitatori ai muzeului din acea săptămână este egal cu … .

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, un trapez dreptunghic $ABCD$ cu bazele AB, CD și $AD \perp AB$.

5p **2.** Media geometrică a numerelor naturale a și b este egală cu 6 și media geometrică a numerelor naturale a și c este egală cu 4. Determinați raportul numerelor b și c.

5p **3.** Radu a cules din grădina sa o cantitate de cireșe pe care și-a propus să o vândă cu 18 lei kilogramul pentru a obține o anumită sumă de bani. El a constatat că 10% din cantitatea de cireșe s-a deteriorat și nu o mai poate vinde. Determinaţi cu ce preț ar trebui să vândă acum Radu kilogramul de cireșe pentru a obține suma de bani pe care și-a propus-o inițial.

4. Se consideră numerele reale $a=(-3)^{25}:3^{22}+2^{40}:16^{9}+5$ și $b=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{7}\right):\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{72}$.

5p **a)** Arătați că $a=-6$.

5p **b)** Arătați că numărul $N=\frac{1}{b}-a$ este divizibil cu 9.

5p **5.** Se consideră expresia $E(x)=\left(2x+\sqrt{2}\right)^2-\left(2x-\sqrt{6}\right)\left(2x+\sqrt{6}\right)-\sqrt{2}\left(3x+\sqrt{32}\right)$, unde x este număr real. Arătați că numărul $E\left(\sqrt{8}\right)$ este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un triunghi ABC cu $BC = 25\text{cm}$ și punctele M și N situate pe laturile AC, respectiv AB, astfel încât $NM \parallel BC$, $NM = 10\text{cm}$, $BN = 9\text{cm}$ și $CM = 12\text{cm}$. Punctele D și E sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv MN.

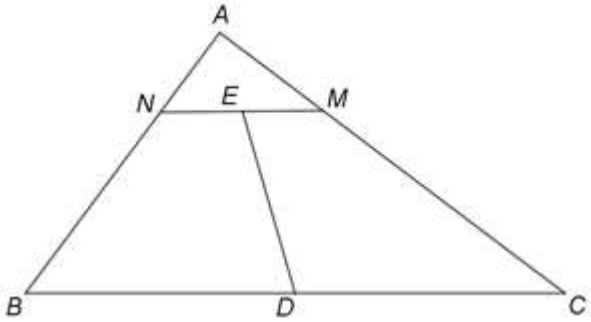


Figura 2

5p **a)** Arătați că perimetrul trapezului $BCMN$ este egal cu 56cm.

5p **b)** Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

5p **c)** Calculați lungimea segmentului DE.

2. În *Figura 3* este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătratul $ABCD$, $AB = 8\text{cm}$ și $AA' = 12\sqrt{2}\text{cm}$. Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD, iar punctul E este situat pe muchia AA' astfel încât $AE = 4\sqrt{2}\text{cm}$.

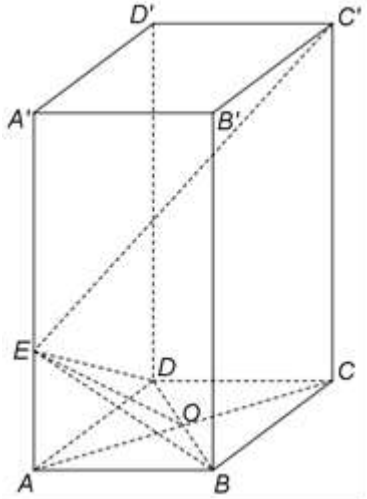


Figura 3

5p **a)** Arătați că aria dreptunghiului $ABB'A'$ este egală cu $96\sqrt{2}\text{cm}^2$.

5p **b)** Determinați măsura unghiului dintre dreapta EO și planul (ABC).

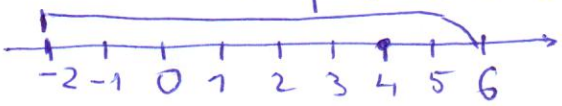
5p **c)** Demonstrați că dreapta $C'E$ este perpendiculară pe planul (BDE).

TESTUL 37: REZOLVARE

SUBIECTUL I:

1) $20:2-10=10-10=0$;

2) $a+2b=10 \mid \cdot 5 \Leftrightarrow 5(a+2b)=5\cdot 10 \Leftrightarrow 5a+10b=50$;

3) 

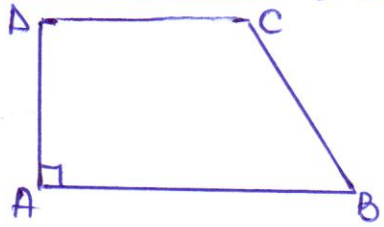
Cel mai mare nr. par din $[-2;6)$ este 4.

4) $180^\circ-135^\circ=45^\circ$

5) $AB=10$ cm. Cubul are 12 muchii congruente, deci suma lungimilor tuturor celor 12 muchii este de $12\cdot 10=120$ (cm).

6) $200+100+150+200+300+250=1200$ (vizitatori).

SUBIECTUL al II-lea:

1) 

2) $\left.\begin{array}{l} m_g(a;b)=\sqrt{ab}=6 \Leftrightarrow ab=36 \\ m_g(a,c)=\sqrt{ac}=4 \Leftrightarrow ac=16 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b=\frac{36}{a} \\ c=\frac{16}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\frac{36}{a}}{\frac{16}{a}}=\frac{36}{a}:\frac{16}{a}=$

$=\frac{36}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{16}=\frac{36^{(4}}{16}=\frac{9}{4}=2{,}25$. Deci $\frac{b}{c}=\frac{9}{4}\ (=2{,}25)$.

3) Notăm cu n numărul kilogramelor de cireșe culese.
Dacă nu s-ar fi stricat o parte ar fi obținut $18\cdot n$ lei.
Dacă 10% se strică $\Rightarrow$ 90% se pot vinde.
Notăm cu x prețul cu care trebuie să le vândă pe cele bune. Avem

$$(90\%\cdot n)\cdot x=18\cdot n \Leftrightarrow \frac{9\cancel{0}}{10\cancel{0}}n\cdot x=18\cdot n \mid :n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x}{10}=18 \mid \cdot 10 \Leftrightarrow 9x=180 \Leftrightarrow x=\frac{180}{9} \Leftrightarrow x=20 \text{ (lei)}$$

R: Ar trebui să vândă cu 20 lei kilogramul.

4) a) $a=(-3)^{25}:3^{22}+2^{40}:16^9+5=$

$=-(3^{25}:3^{22})+2^{40}:2^{36}+5=$

$=-3^3+2^4+5=-27+16+5=-6$.

$\left\{\begin{array}{l} (-3)^{25}=-3^{25} \\ 16=2^4 \\ 16^9=(2^4)^9=2^{36} \end{array}\right.$

Deci $a=-6$, q.e.d.

b) $b = \frac{9}{35} : \frac{3}{70} \cdot \frac{1}{72} = \frac{\cancel{9}^{1}}{\cancel{35}_{1}} \cdot \frac{\cancel{70}^{\cancel{2}\,1}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{72}_{\cancel{8}\,4}} = \frac{1}{12}$

$\frac{1}{7} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{10+35-42}{70} = \frac{3}{70}$ (10, 35, 14)

$\frac{2}{5} - \frac{1}{7} = \frac{14-5}{35} = \frac{9}{35}$ (7, 5)

Deci $a = -6$ și $b = \frac{1}{12}$ și avem $N = \frac{1}{b} - a = 12 - (-6) = 12 + 6 = 18$.

$18 \vdots 9$ $\Big\} \Rightarrow N \vdots 9$, q.e.d.

5) $E(x) = 4x^2 + 4\sqrt{2}x + 2 - (4x^2 - 6) - (3\sqrt{2}x + 8) =$

$= \cancel{4x^2} + 4\sqrt{2}x + \cancel{2} - \cancel{4x^2} + \cancel{6} - 3\sqrt{2}x - \cancel{8} =$

$= \sqrt{2}x$

$(2x+\sqrt{2})^2 = 4x^2 + 4\sqrt{2}x + 2$

$(2x-\sqrt{6})(2x+\sqrt{6}) = 4x^2 - 6$

$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

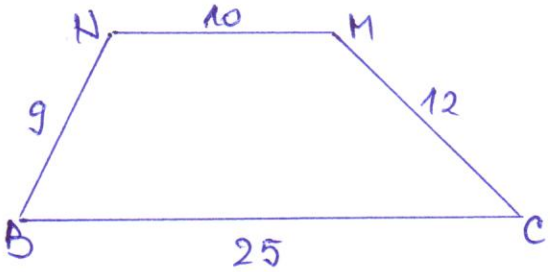
Deci $E(x) = \sqrt{2}x$ pentru orice număr real x.

$E(\sqrt{8}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 = 2^2$, deci $E(\sqrt{8})$ este pătratul lui 2, $2 \in \mathbb{N}$. q.e.d.

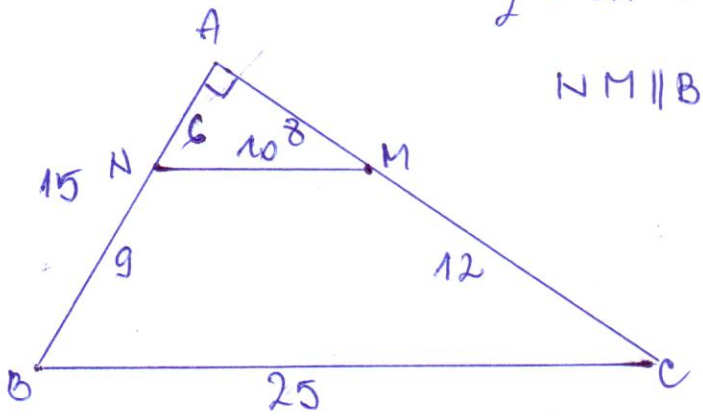
SUBIECTUL al III-lea.

1) a) $P_{BCMN} = BC + CM + MN + NB =$

$= 25 + 12 + 10 + 9 = 56$ (cm), q.e.d.



b)



$NM \parallel BC \Rightarrow \triangle ANM \sim \triangle ABC$ (T.f.N).

$\Downarrow$

$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{NM}{BC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{AN}{AN+9} = \frac{AM}{AM+12} = \frac{10}{25} \Leftrightarrow$

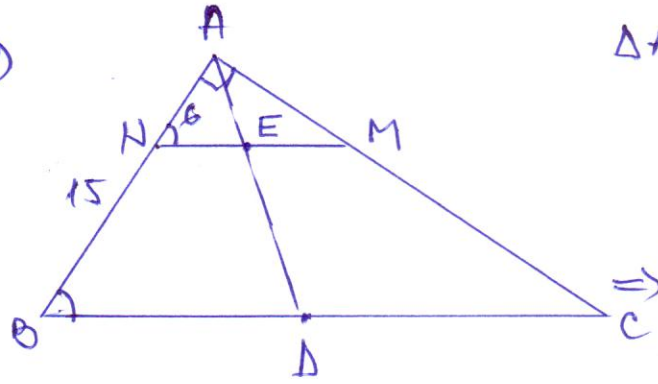
$\Leftrightarrow \frac{AN}{9} = \frac{AM}{12} = \frac{10}{25-10} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AN}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow AN = \frac{\cancel{9}^{3} \cdot 2}{\cancel{3}_{1}} = 6$ (cm); $AM = \frac{\cancel{12}^{4} \cdot 2}{\cancel{3}_{1}} = 8$ (cm).

Deci $AB = 15$ cm; $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm $\xRightarrow{\text{R.T. Pitagora}} \triangle BAC$: dr. în $\hat{A}$, q.e.d.

$15^2 + 20^2 = 25^2$ (nr. pitagorice)

c)



$\Delta ANM \sim \Delta ABC$ (T.f.n).

$\Downarrow$

$\frac{AN}{AB} = \frac{NM}{BC} = \frac{NE}{BD}$; $\widehat{ANE} \equiv \widehat{ABD} \Rightarrow$ (corespondente)

$\Rightarrow \Delta ANE \sim \Delta ABD$ (L.U.L.)

$\Downarrow$

$\widehat{NAE} \equiv \widehat{BAD} \Rightarrow A, E, D$: coliniare.

Atunci $\Delta ANE \sim \Delta ABD$ (T.f.n) și avem:

$\frac{AN}{AB} = \frac{AE}{AD} \Leftrightarrow \frac{6}{15} = \frac{AE}{AD}$

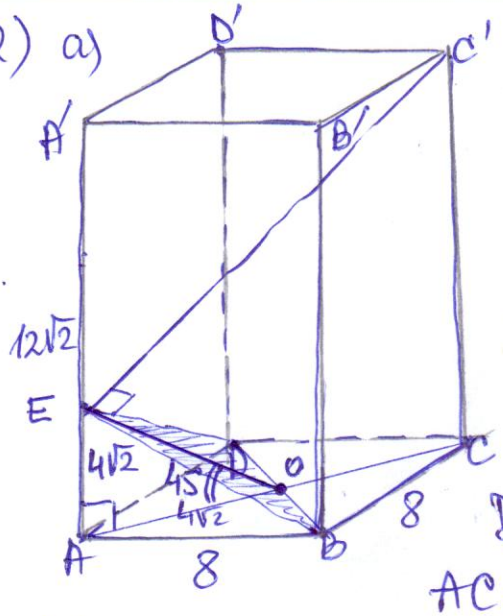
$AD = \frac{BC}{2} = \frac{25}{2} = 12,5$ (cm) (Mediana corespunzătoare ipotenuzei este $\frac{1}{2}$ din ipotenuză) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AE = \frac{AD \cdot 6}{15} = \frac{12,5 \cdot 6}{15} = \frac{12,5 \cdot 2 \cdot \cancel{3}^{1}}{\cancel{15}_{5}} = \frac{25}{5} = 5$ (cm.)

Prin urmare $DE = AD - AE = 12,5$ cm $- 5$ cm $= 7,5$ cm.

---

2) a)



$A_{\square} = L \cdot l$; $A_{ABB'A'} = AB \cdot AA' = 8 \cdot 12\sqrt{2} =$
$= 96\sqrt{2}$ (cm²), q.e.d.

b) Măsura unghiului dintre o dreaptă și un pl. este egală cu cea a ∡ format de dr. cu proiecția ei pe plan.

La noi proiecția lui EO pe planul (ABC) este AO.

Deci $m(\widehat{EO;(ABC)}) = m(\widehat{EO;AO}) = m(\widehat{EOA})$.

$AC = a\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (cm.) $AO = \frac{AC}{2} = 4\sqrt{2}$ (cm.)

În ΔEAO, dreptunghic în $\hat{A}$ avem:

$tg(\widehat{EOA}) = \frac{AE}{AO} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow m(\widehat{EOA}) = 45° = m[\widehat{EO;(ABC)}]$.

(De fapt se observă că ΔEAO: dr. isoscel.)

c) O dreaptă este $\perp$ pe plan dacă e $\perp$ pe 2 dr. concurente din pl.

Vom demonstra că $C'E \perp ED$ și $C'E \perp EB$

ED și EB concurente incluse în (BDE) $\Rightarrow C'E \perp (BDE)$.

Pentru a demonstra că $C'E \perp ED$ vom calcula toate laturile $\Delta C'ED$ și vom aplica R.T. Pitagora.

Avem: $DE^2 = AE^2 + AD^2 = (4\sqrt{2})^2 + 8^2 = 32 + 64 = 96$ (T.P. în ΔEAD)

$DC'^2 = CD^2 + CC'^2 = 8^2 + (12\sqrt{2})^2 = 64 + 288 = 352$ (TP. în $\Delta CC'D$)

$CE^2 = A'E^2 + A'C'^2 = (8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 = 128 + 128 = 256$ (T.P. în $\Delta EA'C'$)

Deci $DC'^2 = CE^2 + DE^2$ (pt. că $352 = 256 + 96$) $\Rightarrow \Delta EDC'$ este dreptunghic în $\hat{E}$ (R.T. Pitagora) $\Rightarrow C'E \perp ED$.

Analog vom demonstra și că $C'E \perp EB$. Mai simplu, observăm că $\Delta C'ED \equiv \Delta C'EB$ (L.L.L.),

$[C'E]$: latură comună

$[ED] \equiv [EB]$ pt. că $\Delta EAD \equiv \Delta EAB$ (c.c.)

$[C'D] \equiv [C'B]$ diagonale în dreptunghiuri (fețe) congruente

iar $m(\widehat{C'ED}) = 90^\circ \Longrightarrow m(\widehat{C'EB}) = 90^\circ$, deci $C'E \perp EB$.

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 37

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	0	**5p**
2.	50	**5p**
3.	4	**5p**
4.	45	**5p**
5.	120	**5p**
6.	1200	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează trapezul dreptunghic Notează trapezul dreptunghic $ABCD$ cu bazele AB, CD și $AD \perp AB$	**4p** **1p**
2.	$\sqrt{ab}=6 \Rightarrow ab=36$, $\sqrt{ac}=4 \Rightarrow ac=16$ $\frac{b}{c}=\frac{36}{16}=\frac{9}{4}$	**2p** **3p**
3.	$c\cdot 18=\frac{90}{100}\cdot c\cdot x$, unde x este prețul cu care ar trebui să vândă Radu kilogramul de cireșe și c este cantitatea inițială de cireșe, în kilograme $x=20$ de lei	**3p** **2p**
4.	**a)** $a=-3^{25}:3^{22}+2^{40}:\left(2^4\right)^9+5=-3^3+2^{40}:2^{36}+5=-3^3+2^4+5=$ $=-27+16+5=-6$	**3p** **2p**
	b) $b=\frac{14-5}{35}:\frac{10+35-42}{70}\cdot\frac{1}{72}=\frac{9}{35}\cdot\frac{70}{3}\cdot\frac{1}{72}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 1\cdot 72}=\frac{1}{12}$ $N=12-(-6)=18$, care este divizibil cu 9	**3p** **2p**
5.	$E(x)=4x^2+4\sqrt{2}x+2-\left(4x^2-6\right)-3\sqrt{2}x-8=\sqrt{2}x$, pentru orice număr real x $E\left(\sqrt{8}\right)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4=2^2$, care este pătratul unui număr natural	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $P_{BCMN}=BC+CM+MN+NB=$ $=25+12+10+9=56\text{cm}$	**3p** **2p**
	b) $NM \parallel BC \Rightarrow \Delta ANM \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}=\frac{NM}{BC} \Rightarrow \frac{AN}{AN+9}=\frac{AM}{AM+12}=\frac{10}{25}$, de unde obținem că $AN=6\text{cm}$ și $AM=8\text{cm}$ $AM^2+AN^2=6^2+8^2=100=10^2=MN^2 \Rightarrow m(\sphericalangle MAN)=90°$, deci ΔABC este dreptunghic în A	**3p** **2p**

	c) $NF \parallel BD \Rightarrow \Delta ANF \sim \Delta ABD$, unde F este punctul de intersecție a dreptelor AD și NM, deci $\frac{AN}{AB} = \frac{NF}{BD}$, de unde obținem că $NF = 5\text{cm} \Rightarrow$ punctele E și F coincid, deci punctele A, E și D sunt coliniare	**2p**
	AD este mediană în triunghiul dreptunghic ABC, deci $AD = \frac{BC}{2} = 12{,}5\text{cm}$ și AE este mediană în triunghiul dreptunghic ANM, deci $AE = \frac{MN}{2} = 5\text{cm} \Rightarrow DE = AD - AE = 7{,}5\text{cm}$	**3p**
2.	**a)** $\mathcal{A}_{ABB'A'} = AB \cdot AA' =$	**3p**
	$= 8 \cdot 12\sqrt{2} = 96\sqrt{2}\,\text{cm}^2$	**2p**
	b) $EA \perp (ABC) \Rightarrow m(\sphericalangle(EO,(ABC))) = m(\sphericalangle(EO,AO)) = m(\sphericalangle AOE)$	**2p**
	$EA \perp (ABC)$ și $AO \subset (ABC) \Rightarrow EA \perp AO$ și, cum $AE = AO = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$, obținem că ΔAOE este dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle AOE) = 45°$	**3p**
	c) $ABCD$ pătrat, deci $BD \perp AC$ și $AA' \perp (ABC)$, $BD \subset (ABC) \Rightarrow AA' \perp BD$ și, cum $AA' \cap AC = \{A\} \Rightarrow BD \perp (ACA')$, deci $BD \perp C'E$	**2p**
	$m(\sphericalangle AEO) = 45°$ și $\Delta A'EC'$ dreptunghic cu $A'E = A'C' = 8\sqrt{2}\,\text{cm} \Rightarrow m(\sphericalangle A'EC') = 45°$, deci, cum A, E, A', C' și O sunt coplanare $\Rightarrow m(\sphericalangle C'EO) = 180° - m(\sphericalangle AEO) - m(\sphericalangle A'EC') = 90°$, deci $C'E \perp EO$	**2p**
	$C'E \perp BD$, $C'E \perp EO$ și $BD \cap EO = \{O\}$, deci $C'E \perp (BDE)$	**1p**